Chapitre 11. Déterminants

1 Déterminants

Définition 1.1. Soit $f \in \mathcal{L}^n(E^n, K)$ (fonctions n-linéaires)
On dit que f est alternée si $f(x_1, ..., x_n) = 0$ dès qu'il existe deux x_i identiques.
Une fonction alternée est antisymétrique.

Proposition 1.2. Soit E un K-ev de dim finie, $f \in \mathcal{L}_a^n(E)$ (fonctions n-linéaires alternées)
Si $(x_1, ..., x_n)$ est lié, $f(x_1, ..., x_n) = 0$
Si $\dim E < n$ alors $f = 0$

1.1 Théorème fondamental

Théorème 1.3. Si E est de dimension finie n, alors $\mathcal{L}_a^n(E)$ est de dimension 1
Plus précisément, si $(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}$ est une base de E, on pose

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{cases} E \to K \\ (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} ... x_{\sigma(n),n} \end{cases}$$

où $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$
Et alors

$$\mathcal{L}_a^n(E) = K\det_{\mathcal{B}}$$

et de plus

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_n) = 1$$

Théorème 1.4. Soit $(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}$ et $(f_1, ..., f_n) = \mathcal{C}$ deux bases de E
Alors pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = \det_{\mathcal{C}}(x_1, ..., x_n) \det_{\mathcal{B}}(f_1, ..., f_n)$$

Corollaire 1.5. Soit E un K-ev de dim finie n, $(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}$ base de E et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$
Alors

$$(x_1, ..., x_n) \text{ libre } \iff (x_1, ..., x_n) \text{ base } \iff \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) \neq 0$$

1.2 Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un K-ev de dim finie n, $(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$
On considère $f : (x_1, ..., x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), ..., x(n))$ n-linéaire alternée.
Il existe alors $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, qui ne dépend pas de la base choisie.

Définition 1.6. λ est appelé déterminant de u : il vérifie pour toute base $\mathcal{B}$, en notant $\lambda = \det u$

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \det u \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$$

$$\det u = \det_{(e_1, ..., e_n)}(u(e_1), ..., u(e_n))$$

Théorème 1.7. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, E de dim finie.

- $*$ $\det \ \mathrm{Id}_E = 1$
- $*$ $\det(v \circ u) = \det v \det u$
- $*$ $u \in GL(E) \iff \det u \neq 0$

et dans ces conditions

$$\det(n^{-1}) = \frac{1}{\det n}$$

1.3 Déterminant d'une matrice

Définition 1.8. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$
Le déterminant de A est

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$$

Proposition 1.9. Soit $n \in \mathcal{L}(E)$, E de dim finie, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ base de E
Alors

$$\det u = \det \left(\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \right)$$

Proposition 1.10. Soit $A \in M_n(K)$

- $*$ $\det A$ est une forme K-linéaire alternée sur des colonnes (ou lignes) de A. Elle est aussi antisymétrique.
- $*$ $\det A^T = \det A$

Proposition 1.11.

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (*) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$$

Théorème 1.12. Soit $M, N \in M_n(K)$

- $*$ $\det I_n = 1$
- $*$ $\det MN = \det M \det N$
- $*$ $M \in GL_n(K) \iff \det M \neq 0$
  Dans ces conditions
  $$\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$$
- $*$ On a
  $$\det MN = \det(u_{MN}) = \det(u_M \circ u_N) = \det(u_M) \det(u_N) = \det M \det N$$

Corollaire 1.13. Si M et N sont semblables dans $M_n(K)$ alors $\det M = \det N$

Proposition 1.14. Soit $A \in M_p(K)$, $B \in M_q(K)$, $C \in M_{p,q}(K)$
Alors

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det A \det B$$

<u>Extension</u> :

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix} = \det A_1 \det A_2 ... \det A_r$$

1.4 Développement selon une rangée

Définition 1.15. Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$
On note $M_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne pour $i, j \in [\![1, n]\!]$
Alors

* $M_{i,j}$ est appelé mineur de $a_{i,j}$ dans M
* $D_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$ est appelé cofacteur de $a_{i,j}$ dans M

Théorème 1.16 (Développement selon une rangée)**.** Avec les notations précédentes

* Fixons la colonne j_0. On a alors
$$\det M = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} D_{i,j_0}$$
* Fixons la ligne i_0. On a alors
$$\det M = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} D_{i_0,j}$$

Théorème 1.17 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$
On a
$$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

1.5 Comatrice

Définition 1.18. Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$, $D_{i,j}$ le cofacteur de $a_{i,j}$ dans M
La comatrice de M est
$$\text{com}(M) = (D_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$$

Théorème 1.19. Soit $M \in M_n(K)$
Alors
$$M(\text{com}\, M)^T = (\text{com}\, M)^T M = (\det M) I_n$$

Corollaire 1.20. Si $M \in GL_n(K)$ alors
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} (\text{com}\, M)^T$$
En particulier, si $K = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $M \in GL_n(K) \mapsto M^{-1}$ est une application rationnelle donc continue.

À savoir : Si $ad - bc \neq 0$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2 Système linéaire

2.1 Écriture d'un système

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $b \in F$, $(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}$ base de E et $(f_1, ..., f_n) = \mathcal{C}$ base de F
Une équation linéaire du type $u(x) = b$ est équivalente à $AX = B$
(avec $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$, X colonne de x dans $\mathcal{B}$ et B colonne de b dans $\mathcal{C}$)

Si on écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \in M_{p,n}(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ alors on obtient le système linéaire équivalent

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Proposition 2.1. On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en faisant des opérations élémentaires (permutations, dilatations et transvections des lignes)

2.2 Solutions d'un système linéaire

Proposition 2.2. Soit (S) $AX = B$ avec $A \in M_{pn}(K)$, $X \in K^n$, $B \in K^p$ et $r = \mathrm{rg}\, A$
* $S_0 = \ker A$ est une sous-espace de K^n de dimension $n - 2$
* Si $B \notin \mathrm{im}\, A$ alors $\mathcal{S}_{(S)} = \emptyset$ (le système n'a pas de solutions)
* Si $B = AX_0$ alors $\mathcal{S}_{(S)} = X_0 + \ker A$ (sous-espace affine de dim $n - r$)

Définition 2.3. Si $A \in GL_n(K)$, (S) $AX = B$ est dit de Cramer.

Proposition 2.4. Soit $(S) : AX = B$, $A \in M_{p,n}(K)$, $B \in K^p$
* Si rg $A = P$, (S) admet au moins une solution (cas lignes libres).
* Si rg $A = n$, (S) admet au plus une solution (cas colonnes libres).
* Si rg $A = n = p$ ie. $A \in GL_n(K)$, (S) admet une solution.

Proposition 2.5 (Formule de Cramer)**.** Soit $A = (C_1|...|C_n) \in GL_n(K)$ et $(S) : AX = B$
Alors l'unique solution de (S) est

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x_i = \frac{\underset{b.c.}{\det}\,(c_1, ..., c_{i-1}, B, c_{i+1}, ..., c_n)}{\det A}$$

<u>Dans le cas $n = 2$</u> : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$ alors $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est solution avec

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & b \\ \mu & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \lambda \\ c & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

2.3 Pivot de Gauss

Théorème 2.6. À l'aide d'opérations élémentaires et quitte à numéroter les inconnues, tout système est équivalent à un système échelonné :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0 + ... + 0 + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a_{rn}x_n = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_p \end{cases}$$

avec les pivots $a_{ii} \neq 0$
Si $(b_{r+1}, ..., b_p) \neq (0, ..., 0)$ alors $S = \emptyset$
Sinon, on appelle $x_1, ..., x_r$ inconnues principales et $x_{r+1}, ..., x_n$ inconnues secondaires. L'espace des solutions est alors un sous-espace affine de K^n de dimension $n - r$ qu'on décrit de manière paramétrique à l'aide des paramètres $x_{r+1}, ..., x_n$ (inconnues secondaires).

2.4 Matrices d'opérations élémentaires

Définition 2.7. On note $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1\leq k,l\leq n}$
On définit pour $i \neq j$, $\lambda \in K$

$$T_{i,j} = I_n + \lambda E_{i,j}$$

C'est une matrice de transvection.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\mu \in K^*$ on pose

$$D_i(\mu) = I_n + (n-1)E_{i,i}$$

C'est une matrice de dilatation.
Pour $\sigma \in S_n$ on pose

$$P_\sigma = \left(\begin{array}{c|c|c|c} e_{\sigma(1)} & e_{\sigma(2)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \end{array} \right)$$

C'est une matrice de permutation.

Proposition 2.8.

* $\begin{cases} (K^*, \times) \to GL_n(K) \\ \mu \mapsto D_i(\mu) \end{cases}$ est un morphisme de groupes injectif et on a

$$D_i(\mu)D_i(\mu') = D_i'(\mu\mu')$$

* $\begin{cases} (K, +) \to SL_n(K) \\ \lambda \mapsto T_{i,j}(\lambda) \end{cases}$ est un morphisme injectif de groupes et on a

$$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\lambda') = T_{i,j}(\lambda + \lambda')$$

* $\begin{cases} (S_n, \circ) \to GL_n(K) \\ \sigma \mapsto P_\sigma \end{cases}$ est un morphisme injectif de groupes et on a

$$P_{\sigma'}P_\sigma = P_{\sigma'\circ\sigma}$$

* Quand on multiplie à gauche par ces matrices on agit sur les lignes.
  Quand on multiplie à droite on agit sur les colonnes.

2.5 Générateurs de $SL_n(K)$ et $GL_n(K)$

Théorème 2.9.
* Les transvections engendrent $SL_n(K)$
  Plus précisément, toute matrice de $SL_n(K)$ est un produit fini de transvections.
* Toute matrice $M \in GL_n(K)$ s'écrit $M = T_1 ... T_r D_n(\det A)$
  Les matrices de dilatation et de transvections engendrent $GL_n(K)$

3 Dualité

3.1 Dual d'un espace vectoriel

Définition 3.1. Soit E un K-ev.
L'espace dual de E est $E^* = \mathcal{L}(E, K)$

Proposition 3.2. Soit E un K-ev, H un hyperplan et $l, l' \in E^*$
* Si $e \in E \setminus H$ alors $E = H \oplus Ke$
* Si L est un sev de E avec $H \subset L$ alors $L = H$ ou $L = E$
* Si $H = \ker l = \ker l'$ alors il existe $\lambda \in K^*$ tel que $l' = \lambda l$

Définition 3.3. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E
On note pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$e_k^* : \begin{cases} E \to K \\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_k \end{cases}$$

$(e_1^*, ..., e_n^*)$ est appelée la base duale de $(e_1, ..., e_n)$
Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a alors

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

Proposition 3.4. Soit $l \in E^*$ qui s'écrit $l = a_1 e_1^* + ... + a_n e_n^*$
Alors

$$l = \sum_{i=1}^{n} l(e_i) e_i^*$$

Si $x \in E$, il s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$$

3.2 Complément ENS : espace bidual, base biduale

Définition 3.5. On appelle $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, K)$ l'espace bidual de E

Proposition 3.6. Dans le cas où E est de dimension finie, E est canoniquement isomorphe à E^{**}

$$\Phi : \begin{cases} E \to E^{**} \\ x \mapsto \tilde{x} : \begin{cases} E^* \to K \\ l \to l(x) \end{cases} \end{cases}$$

Définition 3.7. Si $(l_1, ..., l_n)$ est une base de E^*, on peut retrouver à l'aide le d'isomorphisme précédent une base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ dont $(l_1, ..., l_n)$ est la base duale. On appelle alors $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ la base antéduale.

4 Polynôme caractéristique

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Définition 4.1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$
Le polynôme caractéristique de A, noté χ_A est

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & X - a_{nn} \end{vmatrix} \in K[X]$$

Proposition 4.2. Soit $A \in M_n(K)$, $\lambda \in K$
Alors

$$\lambda \text{ racine de } \chi_A \iff \lambda \text{ valeur propre de } A \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$$

Théorème 4.3. Soit $A \in M_n(K)$
Alors χ_A est un polynôme unitaire de deg n dont le coefficient constant est $(-1)^n \det A$
et celui de X^{n-1} est $-\operatorname{Tr} A$

$$\chi_A = X^n - \operatorname{Tr} A X^{n-1} + ... + (-1)^n \det A$$

Corollaire 4.4. Toute matrice carrée complexe admet une valeur propre.

Définition 4.5. Soit $A \in M_n(K)$
Si χ_A est scindé sur K, ses racines différentes ou égales sont appelées valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Proposition 4.6. Si $A \in M_n(K)$ alors $\chi_{A^T} = \chi_A$

Exemple fondamental : Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in K[X]$
La matrice compagnon de P est

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Sot polynôme caractéristique est

$$\chi_{C_p} = P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$$

4.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition 4.7. Deux matrices semblables de $M_n(K)$ ont le même polynôme caractéristique.

Définition 4.8. Soit E un K-ev de dim finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$
Si $\mathcal{B}$ est une base de E, $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ on définit $\chi_u = \chi_A$ le polynôme caractéristique de u
Par la proposition précédente χ_u est indépendant du choix de $\mathcal{B}$

Corollaire 4.9. Soit E un K-ev de dim finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$
Alors χ_u est unitaire de degré n et plus précisément

$$\chi_u = X^n - \operatorname{Tr} X^{n-1} + ... + (-1)^n \det u$$

Si $\lambda \in K$

$$\lambda \text{ racine de } \chi_u \iff \lambda \text{ valeur propre de } u$$

Si χ_u est scindé sur K

$$\chi_u = (\mathrm{X} - \lambda_1)...(\mathrm{X} - \lambda_n)$$

$\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont appelées valeurs propres de u comptées avec multiplicité.

Proposition 4.10. Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u
Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ (où $u_F : x \in F \mapsto u(x) \in F$)

4.3 L'ouvert dense $GL_n(\mathbb{K})$

Théorème 4.11.

- $*$ $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$
- $*$ $GL_n(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ (avec E de dimension finie)

5 Exercices classiques

5.1 Rang de la comatrice

Soit $A \in M_n(K)$
Montrer que

$$\operatorname{rg} \operatorname{com} A = \begin{cases} n \text{ si } \operatorname{rg} A = n \\ 1 \text{ si } \operatorname{rg} A = n-1 \\ 0 \text{ si } \operatorname{rg} A < n-1 \end{cases}$$

5.2 Matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$
Montrer que elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$

5.3 Le groupe $GL_n(\mathbb{Z})$

On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible dans } M_n(\mathbb{R}),\ M^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})\} = M_n(\mathbb{Z})^\times$
C'est un groupe pour $\times$ (et même un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$)
Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{Z})$

$$M \in GL_n(\mathbb{Z}) \iff \det M = \pm 1$$

A anneau commutatif ($A = \mathbb{Z}_{|n\mathbb{Z}}$, $A = K[X]$)
Si $M \in M_n(A)$, $GL_n(A) = M_n(A)^\times$

$$M \in GL_n(A) \iff \det M \in A^\times$$

5.4 Dual de $M_n(K)$

1. Si $A \in M_n(K)$ on note $l_A : M \in M_n(K) \mapsto \mathrm{Tr}(AM) \in K$
   Montrer que $A \in M_n(K) \mapsto l_A \in M_n(K)^*$ est un isomorphisme entre $M_n(K)$ et $M_n(K)^*$
   En déduire que $\forall l \in M_n(K)^* \; \exists! A \in M_n(K) : \forall M, \; l(M) = \mathrm{Tr}(AM)$
2. Soit $f \in M_n(K)^*$ telle que $f(XY) = f(YX)$ pour tout $X, Y \in M_n(K)$
   Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \, \mathrm{Tr}$
3. Montrer que tout hyperplan contient une matrice inversible.

5.5 Otrhogonalité duale

Soit $l_1, ..., l_p, u$ des formes linéaires sur E, K-ev.

1. Montrer que si u s'annule sur $\bigcap_{i=1}^{p} \ker l_i$ alors $u \in \mathrm{Vect}(l_1, l_2, ..., l_p)$ ie. u s'écrit $u = \lambda_1 l_1 + ... + \lambda_p l_p$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$ (multiplicateurs de Lagrange)
2. On suppose que E est de dimension p et que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker l_i = \{0\}$
   Montrer que $(l_1, ..., l_n)$ est une base de E^*

5.6 L'identité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Soit $A, B \in M_n(K)$

1. On suppose que $K = \mathbb{C}$
   Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ quand A est inversible, puis pour A quelconque.
2. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ dans le cas général.